КРИТЕРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Асхабов С.Н. (Грозный, ЧГУ)

Аннотация: Установлено, что интегро-дифференциальный оператор $(Tu)(x)=\int\limits_{\Gamma} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt$, где $\Gamma=[-\pi,\pi]$ или $\Gamma=(-\infty,\infty)$ является положительными в классе

$$M_p(\Gamma)=\{u(x):\, u(x)\in L_p(\Gamma),\, u'(x)\in L_q(\Gamma)\},\ 1<p<\infty,\ q=p/(p-1),$$

тогда и только тогда, когда (соответственно, дискретное или интегральное) синус-преобразование Фурье его ядра является неотрицательной функцией.

Дано приложение полученных результатов к нелинейным уравнениям, содержащим оператор T.

1. Введение

Хорошо известна [6, с. 176] (Эдвардс) основополагающая роль, которую играют положительно-определенные функции при построении гармонического анализа. Напомним, что **функция** $h(x) \in L_1(a,b)$ называется **положительно-определенной**, если

$$\int_a^b \left(\int_a^b h(x-t) \cdot u(t)dt \right) \cdot u(x)dx \geq 0 \text{ для любой функции } u(x) \in C[a,b].$$

С понятием положительно-определенной функции тесно связано понятие положительного оператора: интегральный **оператор** $(Au)(x) = \int_a^b K(x,t) \cdot u(t)dt$, действующий из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, $q = p/(p-1)$, называется **положительным**, если

$$\langle Ku,u \rangle \equiv \int_a^b \left(\int_a^b K(x,t) \cdot u(t)dt \right) \cdot u(x)dx \geq 0, \quad \forall u(x) \in L_p(a,b).$$

В монографии [1, §10] доказано, что для положительности в вещественном пространстве Лебега $L_p(-\infty,\infty)$, где $1 < p \le 2$, интегрального оператора свертки $(Hu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u(t)\,dt$ необходимо и достаточно, чтобы *косинус-преобразование* Фурье $\hat{h}_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\cos(x\cdot t)\,dt$ его ядра $h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \bigcap L_{q/2}(-\infty,\infty)$ *было* неотрицательной функцией на $[0,\infty)$. Аналогичный результат установлен в [1, §28] и в случае соответствующих дискретного оператора свертки $(\Re u)_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k}\cdot u_k$, где $n \in \mathbf{Z}$, и пространства ℓ_p.

1. **Асхабов С.Н.** Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
5. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1985. – 264 с.

Прежде чем приступить к изложению основных результатов, напомним, что дискретным преобразованием Фурье последовательности комплексных чисел $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется соответствующий ей ряд Фурье

$$a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{ikx}, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\cdot e^{-ikx}dx. \tag{2.1}$$

Нам понадобятся

1) **формула свертки изображений**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x-t)\cdot b(t)\,dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k e^{ikx}; \tag{2.2}$$

2) **обобщенное равенство Парсеваля**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(x)\cdot \overline{b(x)}\,d\,x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}, \tag{2.3}$$

где $b(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot e^{ikx}$, $b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b(x)\cdot e^{-ikx}dx$, а черта сверху означает комплексное сопряжение.

2. КРИТЕРИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < p \le 2$ *и ядро* $h(x) \in L_{q/2}(-\pi, \pi)$, $q = p/(p-1)$. *Для того, чтобы интегральный оператор свертки*

$$(Hu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u(t)\, dt$$

был положительным в вещественном пространстве $L_p(-\pi, \pi)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*:

$$h_c(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \cos(k \cdot t)\, dt \ge 0 \quad \text{при всех} \;\; k = 0, 1, 2, 3, \dots . \tag{2.4}$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $u(x) \in L_p(-\pi, \pi)$ – произвольная функция. Так как $h(x) \in L_{q/2}(-\pi, \pi)$, то из неравенства Юнга для сверток непосредственно вытекает, что интегральный оператор свертки H действует непрерывно из $L_p(-\pi, \pi)$ в $L_q(-\pi, \pi)$ при любом $1 < p \le 2$. Следовательно, функционал $\langle Hu, u \rangle$ имеет смысл и принимает конечное значение.

Докажем положительность оператора H. В силу формулы свертки изображений (2.2), имеем

$$\big(Hu\big)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u(t)\,dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot u_k \cdot e^{ikx}, \qquad (2.5)$$

Значит, в соответствии с (2.1),

$$\big(Hu\big)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k \cdot e^{ikx}, \quad \text{где} \quad H_k = 2\pi \cdot h_k \cdot u_k.$$

Поэтому, используя обобщенное равенство Парсеваля (2.3), с учетом, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, получаем

$$\langle Hu, u\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \big(Hu\big)(x)\cdot \overline{u(x)}\,dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot h_k \cdot u_k \cdot \overline{u_k} =$$

$$= 4\pi^2 \cdot \left[h_0 \cdot |u_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} h_k \cdot |u_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cdot |u_k|^2 \right]. \qquad (2.6)$$

Замечая, что

$$|u_{-k}|^2 = u_{-k}\cdot\overline{u_{-k}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)\cdot\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cdot e^{ikt}dt\right)} = |u_k|^2$$

и

$$h_k + h_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\left(e^{-ikt} + e^{ikt}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\cos(k\cdot t)\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot h_c(k),$$

из равенства (2.6) имеем

$$\langle Hu,u\rangle = 4\pi^2\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot h_c(k)\cdot|u_k|^2\right] =$$

$$= 2\pi\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2 + 4\pi\sum_{k=1}^{\infty} h_c(k)\cdot|u_k|^2 .$$

Итак,

$$\langle Hu,u\rangle = 2\pi\cdot h_c(0)\cdot|u_0|^2 + 4\pi\sum_{k=1}^{\infty} h_c(k)\cdot|u_k|^2, \quad \forall u(x)\in L_p(-\pi,\pi). \quad (2.7)$$

Из формулы (2.7) видно, что оператор H является положительным, если $h_c(k)\geq 0$, т.е. если выполнено условие (2.4). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть оператор H является положительным, т.е. $\langle Hu,u\rangle \geq 0$, $\forall u(x)\in L_p(-\pi,\pi)$. Нужно доказать, что тогда выполняется условие (2.4). Допустим противное, что существует число $k_0 \in \mathbf{Z}_+$ такое, что $h_s(k_0) < 0$.

1). Если $k_0 = 0$, т.е. $h_s(0) < 0$, то выбрав функцию $u(x) = 1$ по формуле (2.1) получим, что $u_0 = 1$ и $u_k = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Но тогда, в силу равенства (2.7), $\langle Hu, u \rangle = 2\pi \cdot h_c(0) < 0$ – что противоречит положительности оператора H.

2). Если $k_0 \in \mathbf{N}$, то выберем функцию $u(x) = \sin k_0 x$. В этом случае по формуле (2.1) имеем

$$u_{-k_0} = \frac{i}{2}, \quad u_{k_0} = -\frac{i}{2} \quad \text{и} \quad u_k = 0 \text{ при } k \neq \pm k_0. \tag{2.8}$$

Найдя изображение этой последовательности:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikx} = u_{-k_0} e^{-ik_0 x} + u_0 + u_{k_0} e^{ik_0 x} = \frac{i}{2} e^{-ik_0 x} - \frac{i}{2} e^{ik_0 x} = \sin k_0 x$$

убеждаемся в правильности вычислений коэффициентов (2.8).

По формуле (2.7), с учетом (2.8) и равенства $u_0 = 0$, получаем

$$\langle Hu, u \rangle = 4\pi \cdot h_c(k_0) \cdot \frac{1}{4} = \pi \cdot h_c(k_0) < 0,$$

что противоречит положительности оператора H.

Необходимость, а вместе с ней и теорема 2.1, полностью доказаны.

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (2.4), может служить любая неотрицательная выпуклая вниз в промежутке $(-\pi,\pi)$ функция (см. [1, с. 104]).

3. КРИТЕРИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

В отличие от теоремы 2.1, относящейся к **интегральному** оператору свертки, ниже будет доказано, что положительность **интегро-дифференциального** оператора свертки эквивалентна требованию, чтобы **синус**-преобразование (а **не косинус**-преобразование) Фурье его ядра было неотрицательным.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и ядро* $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$. *Для того, чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки*

$$(Tu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt$$

был положительным в классе 2π*-периодических вещественных функций*

$$M_p(-\pi,\pi) = \left\{u(x):\ u(x)\in L_p(-\pi,\pi),\ u'(x)\in L_q(-\pi,\pi)\right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$h_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot \sin(k\cdot t)\,dt \ge 0 \quad \text{при всех } k\in\mathbf{N}. \tag{3.1}$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$ – произвольная функция. Так как $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$, то из неравенства Юнга для сверток непосредственно вытекает, что интегральный оператор свертки H действует непрерывно из $L_q(-\pi,\pi)$ в $L_q(-\pi,\pi)$. Значит, интегро-дифференциальный оператор свертки T действует из $M_p(-\pi,\pi)$ в $L_q(-\pi,\pi)$, поскольку $u'(x) \in L_q(-\pi,\pi)$. Следовательно, функционал $\langle Tu,u\rangle$ имеет смысл и принимает конечное значение при любом $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$.

Докажем положительность оператора T. Используя формулу свертки изображений (2.2), имеем

$$(Tu)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot u'_k \cdot e^{ikx}, \qquad (3.2)$$

где $h_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cdot e^{-ikx}dx, \qquad u'_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u'(x)\cdot e^{-ikx}dx.$

Заметим, что

$$u'_k = i\cdot k\cdot u_k. \qquad (3.3)$$

В самом деле, так как $u(-\pi)=u(\pi)$ и $e^{-ik\pi}=e^{ik\pi}$, то применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$u_k' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(x)\cdot e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}du(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[e^{-ikx}u(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-ikx}(-i\cdot k)dx \right] = i\cdot k\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)e^{-ikx}dx = i\cdot k\cdot u_k .$$

Учитывая равенство (3.3), из (3.2) имеем

$$\big(Tu\big)(x) = 2\pi i\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\cdot h_k\cdot u_k\cdot e^{ikx},$$

т.е.

$$\big(Tu\big)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k\cdot e^{ikx}, \quad \text{где} \quad T_k = 2\pi i\cdot k\cdot h_k\cdot u_k . \qquad (3.4)$$

Используя сначала обобщенное равенство Парсеваля (2.3), а затем равенство (3.4), с учетом, что рассматриваются вещественные функции $u(x)$, получаем

$$\langle Tu,u\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}(Tu)(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}T_k\cdot\overline{u_k} = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\, i\cdot k\cdot h_k\cdot u_k\cdot\overline{u_k} =$$

$$= 4\pi^2 i\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\cdot h_k\cdot\left|u_k\right|^2 = 4\pi^2 i\cdot\left[\sum_{k=-\infty}^{-1}k\cdot h_k\cdot\left|u_k\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot h_k\cdot\left|u_k\right|^2\right]. \quad (3.5)$$

Так как (см. доказательство теоремы 2.1) $\left|u_{-k}\right|^2 = \left|u_k\right|^2$ и

$$h_k - h_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cdot\left(e^{-ikt}-e^{ikt}\right)dt = -\frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cdot\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}\,dt =$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cdot\sin(k\cdot t)\,dt = -\frac{i}{\pi}\cdot h_s(k),$$

то из равенства (3.5) имеем

$$\langle Tu,u\rangle = 4\pi^2 i\left[-\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot h_{-k}\left|u_{-k}\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot h_k\left|u_k\right|^2\right] = 4\pi^2 i\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(h_k-h_{-k}\right)\cdot\left|u_k\right|^2 =$$

$$= 4\pi^2 i\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(-\frac{i}{\pi}\cdot h_s(k)\right)\cdot\left|u_k\right|^2 = 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot h_s(k)\cdot\left|u_k\right|^2.$$

Итак,

$$\boldsymbol{\langle Tu,u\rangle = 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot h_s(k)\cdot\left|u_k\right|^2},\quad \forall u(x)\in M_p(-\pi,\pi). \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.6) видно, что оператор T является положительным, если $h_s(k) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbf{N}$, т.е. если выполнено условие (3.1). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть оператор T является положительным, т.е. $\langle Tu, u \rangle \geq 0, \quad \forall u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Нужно доказать, что тогда выполняется условие (3.1). Допустим противное, что условие (3.1) не выполняется, т.е. существует число $k_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $h_s(k_0) < 0$. Выберем функцию $u(x) = \cos k_0 x$. Ясно, что $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции. Имеем

$$u_{-k_0} = \frac{1}{2}, \quad u_{k_0} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad u_k = 0 \text{ при } k \neq \pm k_0. \tag{3.7}$$

Найдя изображение этой последовательности:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \cdot e^{ikx} = \frac{1}{2} \cdot e^{-ik_0 x} + \frac{1}{2} \cdot e^{ik_0 x} = \cos k_0 x$$

убеждаемся в правильности вычислений коэффициентов (3.7).

По формуле (3.6), с учетом (3.7), получаем

$$\langle Tu, u \rangle = 4\pi \cdot k_0 \cdot h_s(k_0) \cdot \frac{1}{4} = \pi \cdot k_0 \cdot h_s(k_0) < 0,$$

что противоречит положительности оператора T.

Необходимость, а вместе с ней и теорема 3.1, полностью доказаны.

Примером ядра $h(x)$, удовлетворяющего условию (3.1), может служить убывающая функция. А именно, если в качестве основного интервала взять $(0, 2\pi)$, то легко показать, что $h_s(k) \geq 0$ для любой невозрастающей в промежутке $(0, 2\pi)$ функции $h(x)$ [7, с. 46].

Замечание. Легко видеть, что при $u(x) = C$ (C – постоянная) $\langle Tu, u \rangle = 0$ и в случае $h_s(k) < 0$, но это не означает, что оператор T может быть положительным и при $h_s(k) < 0$, так как положительность оператора T означает, что неравенство $\langle Tu, u \rangle \geq 0$ должно выполняться для всех $u(x) \in M_p(-\pi, \pi)$.

Рассмотрим, наконец, оператор свертки

$$(Tu)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\cdot u'(t)\,dt=(h*u')(x), \qquad (4.1)$$

где ядро $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Для $u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ и $v(x)\in L_q(-\infty,\infty)$, $q=p/(p-1)$, введем обозначения:

$$\|u\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Если $p=q=2$, то $\langle u,v\rangle=(u,v)$ есть обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty,\infty)$.

Легко видеть, что интегро-дифференциальный оператор T действует из $M_p(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$, поскольку $u'(x)\in L_q(-\infty,\infty)$ и, в силу неравенства Юнга [1, с. 30], интегральный оператор свертки H с ядром $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ действует непрерывно из $L_q(-\infty,\infty)$ в $L_q(-\infty,\infty)$ при любом $q\in(1,\infty)$.

Заметим, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0$, если $u(x)\in M_p(-\infty,\infty)$. В самом деле, так как

$$\left|u(x+\Delta x)-u(x)\right|=\left|\int\limits_x^{x+\Delta x} u'(t)\,dt\right|\le\left(|\Delta x|\right)^{1/p}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u'(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0,$$

то функция $u(x)$ непрерывна, т.е. $u(x)\in C(-\infty,\infty)$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=0$. Так как $u(x)\in C(-\infty,\infty)$ и

$$u^2(x)-u^2(0)=2\int\limits_0^x u(t)\cdot u'(t)\,dt\le 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u(t)\cdot u'(t)|\,dt\le 2\,\|u\|_p\cdot\|u'\|_q\ ,$$

то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}|u(x)|=A$. Осталось показать, что $A=0$. Допустим противное, что $A>0$. Тогда найдется достаточно большое число $c>0$ такое, что при всех $x>c$ будет выполняться неравенство $|u(x)|>A/2$ и, значит, $\|u\|_p^p\ge\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A/2)^p\,dx=\infty$, что невозможно так как $u(x)\in L_p(-\infty,\infty)$. Значит, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)=0$. Аналогично доказывается, что и $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=0$, если $u(x)\in M_p(-\infty,\infty)$.

Обозначим через $\hat{u}(x)$ преобразование Фурье функции $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ (см., например [3, с. 55]):

$$\hat{u}(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} u(t) \cdot e^{-ixt} dt, \tag{4.2}$$

где символ $\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}$ означает предел в среднем с показателем $p = 2$ (т.е. в среднем квадратичном).

Известно [3, с. 65], что $\hat{u}(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, если $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и для любых $u(x), v(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля $(u, v) = (\hat{u}, \hat{v})$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot \bar{v}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x) \cdot \overline{\hat{v}(x)}\, dx, \tag{4.3}$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение.

Кроме того, если $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, а $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, то для преобразования Фурье свертки справедливо равенство [3, с. 77]:

$$\widehat{(h * u)}(x) = \sqrt{2\pi}\,\hat{h}(x) \cdot \hat{u}(x), \tag{4.4}$$

где $\hat{h}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-ixt} dt$, поскольку $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$.

Пусть $u(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, т.е. является финитной бесконечно-дифференцируемой на всей действительной оси $(-\infty, \infty)$ функцией. Тогда (ср. [3, с. 57]), интегрируя по частям, получим

$$\widehat{u'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(t) \cdot e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} du(t) = i \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-ixt} dt,$$

т.е.

$$\widehat{u'}(x) = i \cdot x \cdot \hat{u}(x), \qquad \forall u(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty). \tag{4.5}$$

Используя равенства (4.1)–(4.5), с учетом, что $u(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$ есть вещественная функция, имеем

$$(Tu,u)=\int_{-\infty}^{\infty}(h*u')(x)\overline{u(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(h\hat{*}u')(x)\overline{\hat{u}(x)}\,dx=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(x)\hat{u'}(x)\overline{\hat{u}(x)}\,dx=$$

$$=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(x)\cdot i\cdot x\cdot\hat{u}(x)\cdot\overline{\hat{u}(x)}\,dx=i\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(x)\cdot x\cdot\left|\hat{u}(x)\right|^2 dx=$$

$$=i\sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_c(x)\cdot x\cdot\left|\hat{u}(x)\right|^2\,dx-i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot\left|\hat{u}(x)\right|^2 dx\right],\qquad(4.6)$$

где косинус-преобразование Фурье ядра $h(x)$:

$$\hat{h}_c(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot\cos(x\cdot t)\,dt$$

есть четная функция, а его синус-преобразование Фурье:

$$\hat{h}_s(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot\sin(x\cdot t)\,dt$$

есть функция нечетная на оси $(-\infty,\infty)$.

Замечая, что

$$\left|\hat{u}(-x)\right|^2 = \hat{u}(-x)\overline{\hat{u}(-x)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{ixt}dt\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-ixt}dt\right) = \overline{\hat{u}(x)}\hat{u}(x) = \left|\hat{u}(x)\right|^2$$

и, значит, $x\cdot\left|\hat{u}(x)\right|^2$ есть нечетная на оси $(-\infty,\infty)$ функция, из равенства (4.6) получаем

$$\boldsymbol{(Tu,u) = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot\left|\hat{u}(x)\right|^2 dx} \tag{4.7}$$

или, что то же самое,

$$\boldsymbol{(Tu,u) = 2\sqrt{2\pi}\int_{0}^{\infty}\hat{h}_s(x)\cdot x\cdot\left|\hat{u}(x)\right|^2 dx}\,. \tag{4.8}$$

Из равенства (4.8) следует, что $\left(Tu,u\right)\geq 0$ для любого $u(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$, если $\hat{h}_s(x)\geq 0$ для почти всех $x\in[0,\infty)$.

Так как, по теореме Римана-Лебега [3, с. 42], $\hat{h}_s(x)$ есть непрерывная на всей оси $(-\infty,\infty)$ функция, то условие, что $\hat{h}_s(x)\ge 0$ для почти всех $x\in[0,\infty)$ равносильно условию, что $\hat{h}_s(x)\ge 0$ для всех $x\in[0,\infty)$.

Таким образом, если $h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и $\hat{h}_s(x)\ge 0$ для всех $x\in[0,\infty)$, то

$$\left(Tu,u\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u'(t)\,dt\right)\cdot u(t)\,dt\ge 0,\qquad \forall u(x)\in C_0^{\infty}(-\infty,\infty).$$

Поскольку множество $C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$ всюду плотно в классе $M_p(-\infty,\infty)$ и $\langle Tu,u\rangle$ есть линейный непрерывный функционал, то неравенство

$$\left\langle Tu,u\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(x-t)\cdot u'(t)\,dt\right)\cdot u(t)\,dt\ge 0$$

будет выполняться и $\forall u(x)\in M_p(-\infty,\infty)$.

Итак мы доказали, что если выполнено условие

$$h(x) \in L_1(-\infty,\infty) \ \text{ и } \ \hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt \geq 0, \ \ \forall x \in [0,\infty), \quad (9)$$

то интегро-дифференциальный оператор свертки T является положительным в $M_p(-\infty,\infty)$, т.е. выполняется неравенство

$$\langle Tu, u \rangle \geq 0, \quad \forall u(x) \in M_p(-\infty,\infty). \qquad (4.10)$$

Докажем теперь, что условие (4.9) так же и необходимо для положительности оператора T. Пусть неравенство (4.10) выполнено. Нужно доказать, что тогда $\hat{h}_s(x) \geq 0$ для всех $x \in [0,\infty)$, т.е. выполнено условие (4.9). Допустим противное, что условие (4.9) не выполняется, т.е. существует точка $x_0 \in [0,\infty)$ такая, что $\hat{h}_s(x_0) < 0$. Ясно, что $x_0 > 0$, так как очевидно, что $\hat{h}_s(0) = 0$.

Поскольку, по теореме Римана-Лебега, $\hat{h}_s(x)$ есть непрерывная на всей оси $(-\infty,\infty)$ функция, то найдется ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0)=\{x : x>0, |x\text{-}x_0|<\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, точки x_0 такая, что будет выполняться неравенство

$$\hat{h}_s(x)<0, \qquad \forall x\in U_\varepsilon(x_0).$$

Выберем функцию $u(x)\in C_0^\infty(-\infty,\infty)$ такую, что $\hat{u}(x)=0$, если $x\notin U_\varepsilon(x_0)$ и $\hat{u}(x)\neq 0$, если $x\in U_\varepsilon(x_0)$, причем $\hat{u}(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Выбор функции $u(x)$ можно осуществить с помощью хорошо известной формулы (см., например, формулу (4.3) из [1, с. 28]), согласно которой:

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(t)e^{ixt}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{U_\varepsilon(x_0)}\hat{u}(t)e^{ixt}dt \quad \text{для почти всех } x\in(-\infty,\infty).$$

Тогда, учитывая, что $\forall x \in U_{\varepsilon}(x_0)$ выполняются строгие неравенства $\hat{h}_s(x) < 0$, $x > 0$ и $|\hat{u}(x)| > 0$, по формуле (4.7) получим

$$\langle Tu, u \rangle = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_s(x) \cdot x \cdot |\hat{u}(x)|^2 \, dx = \sqrt{2\pi} \int_{U_{\varepsilon}(x_0)} \hat{h}_s(x) \cdot x \cdot |\hat{u}(x)|^2 \, dx < 0,$$

что противоречит неравенству (4.10).

Необходимость доказана.

Таким образом, доказан следующий критерий положительности оператора T.

Теорема 4.1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и ядро* $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. *Для того, чтобы интегро-дифференциальный оператор свертки*

$$(Tu)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t) \cdot u'(t)\, dt$$

был положителен в пространстве

$$M_p(-\infty,\infty) = \{u(x) : u(x) \in L_p(-\infty,\infty),\ u'(x) \in L_q(-\infty,\infty)\},$$

где $q = p/(p-1)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt \ge 0, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

Приведем простые примеры ядер $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих условию (9). Для этого сначала заметим, что

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} h(t) \cdot \sin(x \cdot t)\, dt,$$

если $h(x)$ нечетная функция.

Пример 4.1. Пусть $h(x) = e^{-|x|}$. Тогда $\|h\|_1 = 2$ и

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cdot \sin(x \cdot t)\, dt = 0$$

для любого $x \in [0, \infty)$, так как подынтегральная функция является нечетной.

Пример 4.2. Пусть $h(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$. В этом случае

$$\|h\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = 1$$

и, в силу равенства (35) из [2, с. 67]:

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^n} \sin(x\cdot t)dt = \frac{\pi\cdot x\cdot e^{-\alpha\cdot x}}{2^{2n-2}(n-1)!\alpha^{2n-3}} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(2n-m-4)!}{m!(n-m-2)!}(2\alpha\cdot x)^m,$$

$$\operatorname{Re}\alpha > 0,\quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

при $n = 2$ и $\alpha = 1$, имеем

$$\hat{h}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2} \sin(xt)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2} \sin(xt)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\pi\, x\, e^{-x}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{x}{2e^{x}} \geq 0$$

для любого $x \in [0,\infty)$.

Заметим, что если $x < 0$, то

$$\hat{h}_s(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2} \cdot \sin(-x\cdot t)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x}{2e^{-x}}$$

так, что в примере 2, в соответствии с теоремой Римана-Лебега, $\hat{h}_s(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

5. Теоремы существования и единственности

Используя доказанные теоремы 3.1 и 4.1 можно, следуя работе [1], исследовать различные классы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки, содержащих операторы $(Tu)(x) = \int_\Gamma h(x-t) \cdot u'(t)\, dt$, где $\Gamma = [-\pi, \pi]$ или $\Gamma = (-\infty, \infty)$.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (оператор Немыцкого). Пусть вещественнозначная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [-\pi,\pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-\pi,\pi]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x,u)$, а через $L_p^+(-\pi,\pi)$ множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$.

Методом максимальных монотонных (по Браудеру-Минти) операторов [7] доказываются следующие две теоремы.

7. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. 336 с.

Теорема 5.1. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_q(-\pi,\pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию:

$$h_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt \geq 0 \quad \text{при всех } k \in \mathbf{N}. \tag{3.1}$$

Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

5.1) $|F(x,u)| \leq a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, где $a(x) \in L_q^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;

5.2) $F(x,u)$ не убывает по u;

5.3) $F(x,u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^{p-1}$, где $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ уравнение

$$\lambda \cdot F\big(x,u(x)\big) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t)\, dt = f(x)$$

имеет решение $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$. Это решение единственно, если в условии 5.2) функция $F(x,u)$ строго возрастает по u.

Следствие 5.1. Пусть $p \geq 2$ любое четное число, $f(x) \in L_q(-\pi,\pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию $\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\sin(k\cdot t)\,dt \geq 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Тогда уравнение

$$u^{p-1}(x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u'(t)dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$.

Следующая теорема отличается от теоремы 5.1 как по характеру ограничений на нелинейность $F(x,u)$ и правую часть $f(x)$, так и по структуре доказательства.

Теорема 5.2. Пусть $1 < p < \infty$, $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию:

$$h_s(k) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cdot\sin(k\cdot t)\,dt \geq 0 \quad \text{при всех } k \in \mathbf{N}. \qquad (3.1)$$

Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

5.4) $|F(x,u)| \leq g(x) + d_3|u|^{1/(p-1)}$, где $g(x) \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;

5.5) $F(x,u)$ строго возрастает по u;

5.6) $F(x,u)\cdot u \geq d_4 \cdot |u|^{p/(p-1)}$, где $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda \geq 0$ уравнение

$$u(x) + \lambda\cdot F\left(x, \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)\cdot u'(t)dt\right) = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$.

Следствие 5.2. Пусть $p \geq 2$ любое четное число, $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, а ядро $h(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ и удовлетворяет условию $\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cdot \sin(k \cdot t)\, dt \geq 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Тогда уравнение

$$u(x) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) \cdot u'(t)dt \right)^{1/(p-1)} = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in M_p(-\pi,\pi)$.

Теоремы 5.1 и 5.2 при $p = 2$ охватывают и случай **линейных** интегро-дифференциальных уравнений типа свертки.

Литература

1. **Асхабов С.Н.** Нелинейные уравнения типа свертки. – М.: Физматлит, 2009. – 304 с.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина (Серия: «СМБ»). – М.: Наука, 1969. – 344 с.
3. **Князев П.Н.** Интегральные преобразования. М.: Едиториал УРСС, 2004. – 200 с.
4. **Porter D., Stirling D.** Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. – Cambr. Univ. Press. 1990. – 382 p.
5. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении. В 2-х томах. Том 1. М.: Мир, 1985. – 264 с.
6. **Харди Г.Х., Рогозинский В.В.** Ряды Фурье. – М.: Физматгиз, 1959. – 156 с.
7. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.